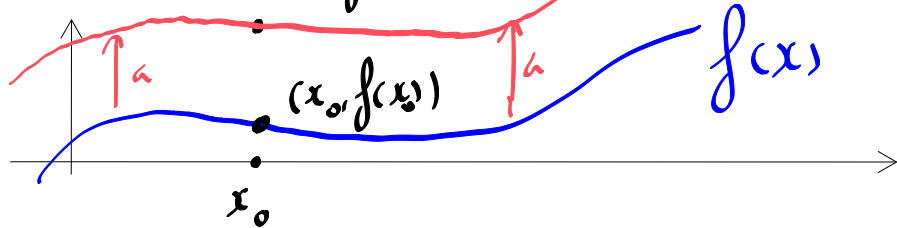


## Impact des compositions simples sur le graph

Soit  $f$  une fonction réelle. Dans chaque cas, on considère  $g \circ f$  et  $f \circ g$ .

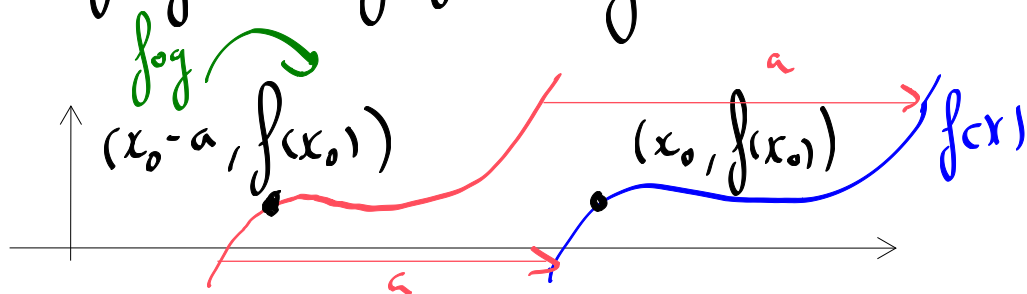
Cas 1:  $g(x) = x + a$  où  $a \in \mathbb{R}$

- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + a$



Une translation vertical de  $a$  (vers le haut si  $a \geq 0$ , vers le bas si  $a \leq 0$ )

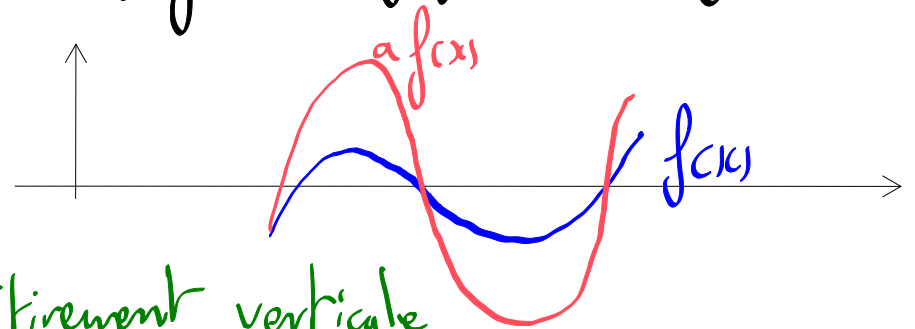
- $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + a)$



Une translation horizontale de  $a$  dans une direction contre l'intuition!  
(à gauche si  $a > 0$ , à droite si  $a < 0$ )

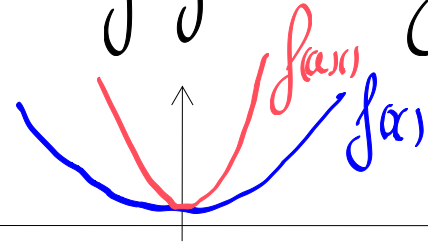
Cas 2:  $g(x) = ax$  où  $a \in \mathbb{R}$

- $g \circ f(x) = g(f(x)) = a f(x)$



Étirement vertical

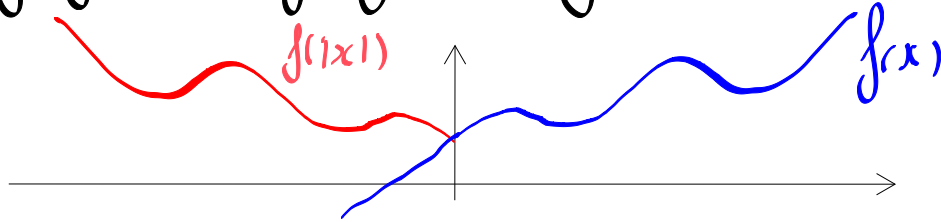
- $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(ax)$



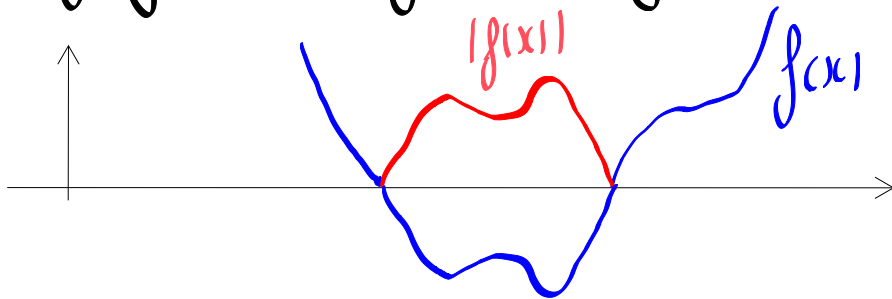
Étirement horizontal (contre intuition)

Cas 3 :  $g(x) = |x|$

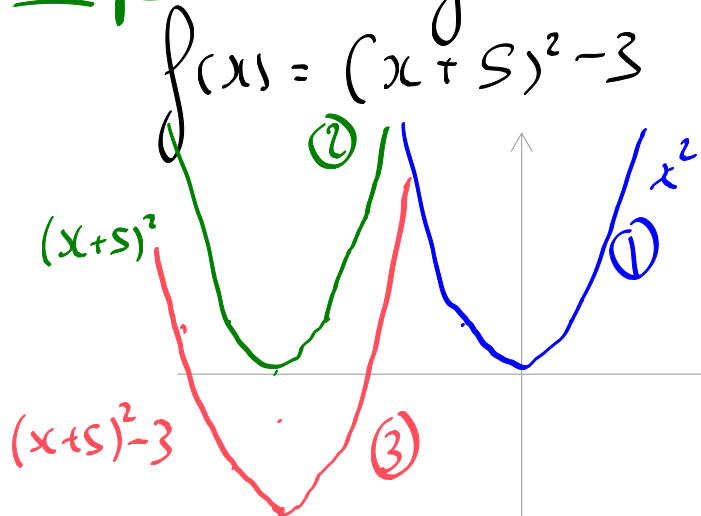
- $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(|x|)$



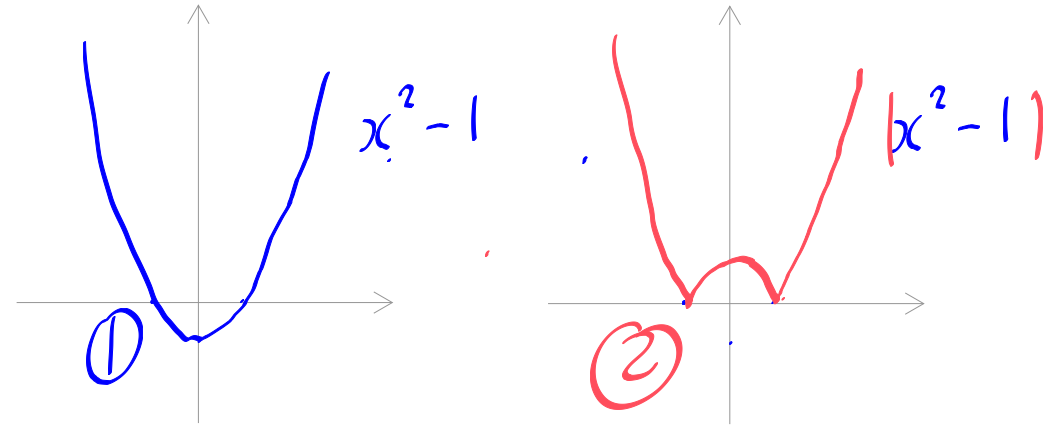
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = |f(x)|$



Exemples • Soit  $f(x) = x^2 + 10x + 22$



- Soit  $f(x) = |x^2 - 1|$



On remarque que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1; 1] \\ x^2 - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



# Fonctions monotones

Définitions Soit  $f$  une fct.

- $f$  est **croissante** si  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f$  est **strictement croissante** si  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $f$  est **décroissante** si  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- $f$  est **strictement décroissante** si  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- $f$  est (strictement) **monotone** si  $f$  est (strictement) croissante ou décroissante.

Exemple Résoudre  $\sqrt[3]{1-x^2} + x > 1$   
 $\sqrt[3]{1-x^2} > -x+1$

$1-x^2 > (-x+1)^3$  comme  $f(x) = x^3$  est croissante

$$1-x^2 > -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 ;$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x > 0 ; x(x-1)(x-3) > 0$$

$$\hookrightarrow S = ]0;1[ \cup ]3;+\infty[$$

Théorème Une fct strictement monotone est injective

Preuve On prend  $x_1$  et  $x_2$  tel que  $x_1 \neq x_2$ .  
Supposons  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$   
 $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$   $\square$

Définitions Soit  $f$  une fct

- $f$  est **majorée** sur  $A$  si  $\exists M$  tq  $f(x) \leq M \forall x \in A$
  - $f$  est **minorée** sur  $A$  si  $\exists m$  tq  $f(x) \geq m \forall x \in A$
  - $f$  est **bornée** sur  $A$  si minorée et majorée sur  $A$
- $\hookrightarrow f$  est bornée sur  $A$  si  $\exists M > 0$  tel que  $|f(x)| < M, \forall x \in A$

Exemples

- $\sin(x)$  et  $\cos(x)$  sont bornée
- $\frac{1}{x^2}$  est minorée (par 0) mais pas majorée sur  $D_f = \mathbb{R}^*$

## Limites $x \rightarrow \pm\infty$

Définition Soit  $f$  une fct.

• On dit que  $f$  est définie sur un voisinage de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) si  $\exists u \in \mathbb{R}$ , tel que  $[u; +\infty[ \subset D_f$  (resp.  $]-\infty; u] \subset D_f$ )

Exemples  $\frac{1}{x}$  est définie sur un voisinage de  $+\infty$  mais  $\tan(x)$  ne l'est pas.

Définition Soit  $f$  une fct (définie sur un voisinage de  $+\infty$ ) et  $L \in \mathbb{R}$ .

Alors on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  si

$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}$  tq  $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$   
 $f(x)$  est  $\varepsilon$ -proche de  $L$

Similairement,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  si

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}$  tq  $x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Exemples

• Montrons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Soit  $\varepsilon > 0$ . On veut

$$|f(x) - 0| < \varepsilon ; |f(x)| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon ; \frac{1}{x} < \varepsilon \quad (\text{supposons } x > 0)$$

$$\Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$$

On peut donc choisir  $M = \frac{1}{\varepsilon}$  et on a  
 $x > M \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$

• Montrons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x+7} = 3$

Soit  $\varepsilon > 0$ . On veut

$$|f(x) - 3| < \varepsilon; \quad \left| \frac{6x}{2x+7} - 3 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{21}{2x+7} \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{21}{2x+7} < \varepsilon$$

Supposons  $x > 0$

$$21 < \varepsilon(2x+7); \quad 2\varepsilon x > 21 - 7\varepsilon$$

$$\Rightarrow x > \frac{21 - 7\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{21}{2\varepsilon} - \frac{7}{2}$$

On peut donc choisir  $M = \frac{21}{2\varepsilon} - \frac{7}{2}$   
et on a

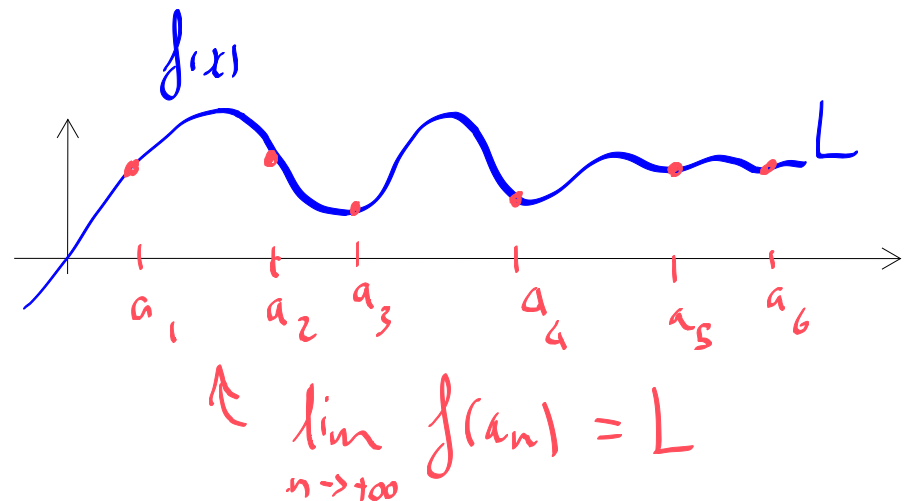
$$x > M \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$$

Il y a un lien entre les limites des fonctions et des suites.

Théorème Soit  $f$  une fct (définie sur un voisinage de  $\pm\infty$ ). On a les équivalences suivantes

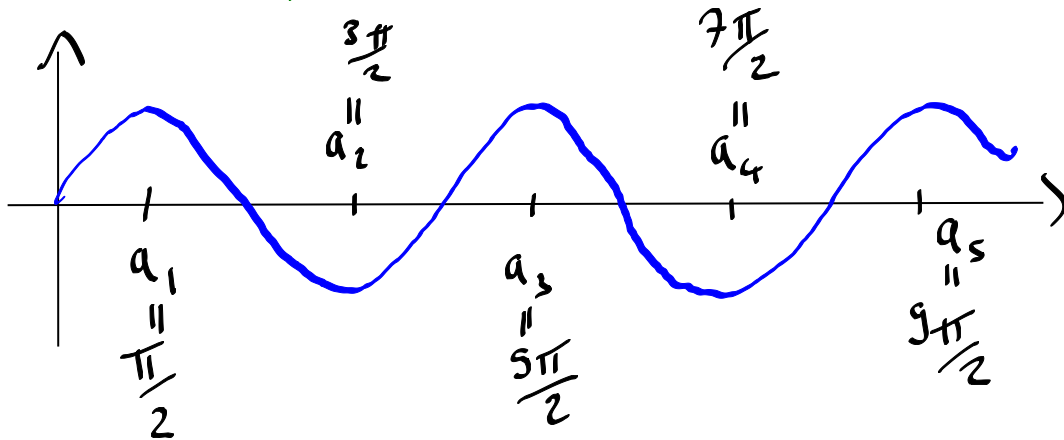
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$$

pour toute suite  $(a_n)$   
tel que  $a_n \rightarrow \pm\infty$



Ce théorème est utile pour montrer qu'une fonction ne converge pas vers une limite  $L$ , car il suffit de trouver une suite  $(a_n)$  tel que  $a_n \rightarrow +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq L$

Exemple Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$  n'existe pas.



Graphiquement, on voit que  $a_n \rightarrow +\infty$  et  $\sin(a_n) = (-1)^{n+1}$

En effet, on a  $a_n = \frac{\pi}{2} + \pi(n-1) \rightarrow +\infty$   
 $\Rightarrow \sin(a_n) = (-1)^{n+1}$   
 $\hookrightarrow$  diverge!

Donc, par le théorème  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$  n'existe pas.

Les limites des fonctions peuvent aussi diverger vers  $+\infty$  ou  $-\infty$

Soit  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists M \text{ tel}$$

$$\text{que } x > M \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \text{ tel que}$$

$$x < N \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists M \text{ tel}$$

$$\text{que } x > M \Rightarrow f(x) < A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ si } \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \text{ tel que}$$

$$x < N \Rightarrow f(x) < A$$